Association
mathématique
du Québec

Article

Difficultés en mathématiques, difficultés d'abstraction : des liens nécessaires entre enseignement et apprentissage

Gustavo Barallobres, Département d'éducation et formation spécialisées,
Université du Québec à Montréal
barallobres.gustavo@uqam.ca

Résumé

Certaines décisions de nature psychopédagogique concernant les élèves en difficulté sont souvent prises sans contrôle spécifique sur le plan didactique, ce qui peut conduire à une perte de l'enjeu mathématique de la situation (évanouissement du savoir). Le traitement de la généralité et de l'abstraction en mathématiques est source de difficultés, en particulier lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Nous explorons, dans ce texte, différentes formes que les difficultés en mathématiques prennent dans la transition de l'arithmétique à l'algèbre, en particulier celles concernant la généralisation et l'abstraction, et avançons certaines hypothèses d'interprétation dans le cadre d'un double processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Nous montrerons que la manière habituelle de considérer l'abstraction en lien avec les processus de décontextualisation des connaissances minimise le rôle fondamental qu'y jouent certains éléments du contexte, en particulier les interprétations faites par les élèves des situations d'enseignement, ce qui peut avoir un impact sur la manière de concevoir les difficultés d'apprentissage des mathématiques.

Mots clés : généralisation, abstraction, algèbre, difficultés d'apprentissage.

Introduction

Un phénomène didactique caractérise les classes de mathématiques en adaptation scolaire, autant au niveau primaire que secondaire : face aux difficultés rencontrées par les élèves, on [1] a le réflexe de trouver des accès plus faciles à la production de bonnes réponses (éviter que les élèves rencontrent des échecs) (Giroux, 2000 [9]), sous l'hypothèse que les élèves en difficulté ont besoin de vivre « des réussites » pour leur motivation.

1. Le « on » réfère à une description générale qui se dégage des observations des pratiques d'interventions en adaptation scolaire et de l'expérience personnelle de l'auteure, Giroux.

En particulier au secondaire, on évite de travailler un même objet de savoir sur un temps prolongé, ce qui se traduit par un découpage des savoirs en micro-tâches, en plusieurs petites étapes à franchir, lesquelles sont proposées à plusieurs jours d'intervalle (Houle, 2007 [13]).

Nos observations montrent que ces décisions de nature psychopédagogique sont souvent prises sans contrôle spécifique sur le plan didactique, ayant un impact sur l'enjeu mathématique de la situation (notamment un évanouissement du savoir) et, par conséquent, sur la conceptualisation des notions mathématiques. En effet, si l'apprentissage des mathématiques se réalise au sein d'un double processus d'adaptation et d'acculturation à des pratiques mathématiques préétablies (Bessot 2011 [2]), l'affaiblissement de ce dernier par certains modes d'adaptation de l'enseignement a un impact sur les mathématiques enseignées et apprises, en particulier une algorithmisation des objets de savoirs.

Un changement important dans les pratiques mathématiques scolaires se produit au début du secondaire en ce qui concerne la pensée mathématique : il s'agit du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Le travail en algèbre exigera, entre autres, un regard spécifique sur des problèmes particuliers dans le but de dégager des méthodes génériques de résolution de "classes de problèmes" du même type. Un jeu délicat s'installe ainsi entre le traitement des exemples particuliers et les processus de généralisation et d'abstraction propres à la constitution de la pensée algébrique.

La recherche en didactique de l'algèbre (Bednarz et al, 1996 [1] ; Coulange et Drouhard, 2012 [4] ; Cai et Knuth, 2011 [3]), a mis en évidence plusieurs discontinuités et fausses continuités entre arithmétique et algèbre et les difficultés d'apprentissage associées. Comme Sierpinska (2012 [22]) l'affirme, l'élaboration d'outils mathématiques cherchant à unifier, généraliser et vérifier la validité des méthodes mathématiques requiert une expérience de résolution de problèmes afin de pouvoir abstraire et généraliser les méthodes particulières de résolution jusqu'à en faire une méthodologie. Cependant, il est difficile de faire vivre une expérience de cette nature aux élèves du secondaire (savoirs nécessaires non disponibles ; problèmes de temps didactique, etc.). Certaines analyses des difficultés d'apprentissage en algèbre rencontrées par les élèves ne tiennent pas compte du problème épistémologique soulevé par Sierpinska et attribuent les difficultés d'abstraction à des problèmes cognitifs propres aux élèves. Les interventions didactiques qui découlent de cette interprétation se traduisent fréquemment par la pseudo-concrétisation des savoirs mathématiques afin de les rendre moins abstraits et, par conséquent, plus accessibles.

Nous explorons, dans ce texte, différentes formes que les difficultés en mathématiques prennent dans la transition de l'arithmétique à l'algèbre et avançons certaines hypothèses d'interprétation dans le cadre d'un double processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Nous montrerons que la manière habituelle de considérer l'abstraction en lien avec les processus de décontextualisation des connaissances minimise le rôle fondamental qu'y jouent certains éléments du contexte, en particulier les interprétations faites par les élèves des situations d'enseignement, ce qui peut avoir un impact sur la manière de concevoir les difficultés d'apprentissage des mathématiques. En même temps, nous mettrons en évidence une tension au sein de la relation didactique concernant les processus d'abstraction caractérisée, d'une part par la manière dont les enseignants conçoivent les objets mathématiques et par des actions (des enseignants et des élèves) tendant à réduire les niveaux d'abstraction, et d'autre part par la spécificité même de ces objets.

1 Généralisation et abstraction dans les mathématiques scolaires

La question de l'existence et de la nature des idées abstraites a longuement alimenté la discussion philosophique, en faisant écho sur les mathématiques et la nature de leurs objets : une idée simple réfère à un objet réel, mais si les idées abstraites existent, de quoi parlent-elles ? Et les mathématiques, en particulier, de quoi sont-elles la connaissance ? Si les objets mathématiques ne sont pas des objets du monde physique, de quelle nature sont-ils ?

Une des objections centrales à l'acceptation des idées abstraites concerne le fait que l'esprit humain ne peut se représenter des idées qui ne sont pas associées à des objets réels (par exemple, la couleur d'un objet ne fait qu'un avec l'objet en question) :

> « Comment est-il possible de penser à part ce qu'on reconnaît ne pouvoir exister à part ? » (Berkeley cité par Laporte, 1940 [14])

Cependant, il est difficile d'ignorer la possibilité d'effectuer *des processus intellectuels d'abstraction* permettant à la pensée de s'écarter des données brutes et d'isoler quelque chose (un trait spécifique, une détermination considérée en elle-même, un aspect fragmentaire (Delaunay, A., [5])) qui les dépasse, même si l'on ne peut se représenter ce qui est isolé. On peut ainsi concevoir l'idée de « forme » même si l'on ne peut se représenter que des formes particulières. Pour Piaget (Fondation Jean Piaget [7]), il s'agit de processus d'abstraction simples ou empiriques, liés à des expériences relatives à des objets physiques donnant lieu à des observables sur l'action en tant que processus matériel (un mouvement, une position, etc.), permettant d'extraire des propriétés propres à un niveau de connaissances pour les refléter (au sens optique du terme) sur un plan supérieur. Piaget insiste sur le fait que ce qui est tiré du plan inférieur pour être réfléchi sur le plan supérieur provient des actions du sujet et n'est pas le simple reflet de propriétés du monde extérieur. C'est une certaine activité concernant les objets physiques et impliquant des actions du sujet qui l'amène à concevoir la notion de « forme » et non pas un aspect intrinsèque aux objets.

Les investigations de Piaget sur la formation du symbole chez l'enfant permettent de mettre en évidence un écart considérable entre le monde de l'action, de la perception et de la représentation. Ceci l'amène à définir un autre type d'abstraction : l'interaction du sujet avec des objets physiques donne lieu à une autre forme d'abstraction appelée « réfléchissante », qui concerne les inférences tirées à partir des coordinations d'actions elles-mêmes réalisées sur ces objets. Il s'agit d'un processus de reconstruction réflexive (au sens cognitif et non optique), sur le plan de la représentation, par lequel le sujet s'efforce de construire une compréhension conceptuelle de ce qu'il perçoit ou croit percevoir. Ce type d'abstraction peut demeurer inconsciente ou devenir consciente (par exemple, l'analyse comparative de deux démarches). Dans ce dernier cas, Piaget parlera d'« abstraction réfléchie ».

Les processus d'abstraction s'accompagnent de processus de généralisation : lorsqu'il s'agit d'abstractions empiriques, en se tenant aux objets physiques pour vérifier la validité des relations identifiées pour en établir des généralisations et en tirer des prévisions ultérieures (sans chercher des « raisons » conduisant à dépasser les observables), on produit des généralisations inductives.

Par contre, par la mise en relation d'objets et, en particulier, des actions sur les objets (selon la « couche » d'abstraction impliquée) appréhendés d'un point de vue déterminé, s'élaborent des généralisations extensives et compréhensives conduisant à la production de nouveaux contenus qui ne sont pas donnés dans les observables et qui rendent possible la conceptualisation. Un exemple bien connu est celui de l'abstraction qui, toujours selon la conception classique, aurait conduit de la considération des animaux particuliers à la notion générale d'animal. Piaget (Fondation Jean Piaget [7]) montre que même cette généralisation « simple » nécessite la construction d'un savoir-faire opératoire relativement aux classes (inclusion de la classe des hommes dans celle des animaux, etc.). Piaget parle dans ce cas de généralisation constructive accompagnant l'abstraction réfléchissante, impliquant d'une part des représentations nouvelles permettant des éclairages différents d'une même situation et, d'autre part, des constructions nouvelles.

En ce qui concerne les mathématiques, l'expérience, source de connaissance, ne porte pas sur des objets physiques eux-mêmes, mais sur les différents types d'actions que l'on peut exercer sur eux et sur les coordinations les plus générales de ces actions, telles que réunir, ordonner, mettre en correspondance, etc. (Legendre [15]). L'abstraction mathématique est la « forme » de l'expérimentation (Gonseth, 1936 [10]) : la construction de la notion de droite, par exemple, nécessite des connaissances préliminaires de certaines réalisations plus ou moins grossières, telles que l'arête d'une règle ou le trait qu'elle permet de tracer, etc., mais la réflexion sur les actions effectives et leur coordination conduit à la création des représentations schématiques abstraites qui donnent forme à l'objet mathématique (qui est toujours en évolution, selon les niveaux d'abstraction concernés). L'objet mathématique se constitue ainsi par des schématisations permettant d'exprimer les relations qui sont intéressantes et que l'on souhaite retenir. Chaque schématisation peut devenir objet d'étude en elle-même et ainsi de suite, obtenant par ce processus les différents niveaux d'abstraction mentionnés.

Dans le cas spécifique de l'algèbre, c'est à partir des activités sur des objets mathématiques déjà constitués que s'engendrent de nouveaux objets ; le système de référence est déjà mathématisé et les questions que l'on se pose, et qui orientent les relations entre les actions associées aux objets (et non pas les relations entre les objets) que l'on établit, sont celles que la pratique mathématique elle-même suscite. Les formules algébriques représentent « un état » d'une forme de généralisation (toujours en devenir), un aboutissement provisoire d'un processus d'interaction entre « le particulier » et « le général ». Le mode de représentation n'est pas unique : différentes formulations expriment le même objet, chacune permettant de mettre en évidence des caractéristiques différentes (Otte, 1992 [18]).

1.1 Quelques repères historiques sur les objets mathématiques et leur dénotation

La généralisation pose ainsi la question de comment *le particulier et le général interagissent*, comment objets, concepts et signes sont reliés. Nous avons expliqué que cette interaction ne se limite pas à un prolongement des connaissances mathématiques pré-données par des inductions empiriques ; certaines relations s'élaborent contextuellement (par le biais des questions spécifiques du problème en question) et deviennent susceptibles de généralisation en fonction de leur efficacité hypothétique à l'intérieur des pratiques mathématiques. Elles peuvent impliquer des processus inductifs (établissement de relations, identification de régularités par l'analyse de cas singuliers) et des processus constructifs basés sur des inférences qui conduisent à un ensemble de relations enchaînées déductivement (validation de propriétés universelles ; représentation symbolique de classes d'objets, etc.).

Serfati (2005 [21]) identifie un autre processus d'abstraction et de généralisation caractérisant le développement des mathématiques à une certaine époque, et dans lequel le symbolisme a joué un rôle fondamental. Avant Leibnitz (1646-1716), les origines de la pensée mathématique se situaient carrément dans le registre de la signification :

> Les seuls mouvements de la pensée reconnus comme légitimes se faisaient dans le sens de la représentation, du registre des significations vers le symbolisme. Ni

Descartes, ni bien entendu Cardan, ne considérèrent qu'ils puissent recevoir des suggestions provenant du texte symbolique. (Serfati 2005, p.6 [21])

Après Leibnitz, le « jeu » combinatoire des symboles – autonome (localement et de manière momentanée) par rapport aux significations – fut fondamental pour l'évolution de la pensée mathématique. Il s'agit de la création de « formes » sans signification [2] inconcevables dans l'écriture rhétorique. La résistance de plusieurs mathématiciens et philosophes qui rejetaient le fait que les mathématiques puissent se passer d'une certaine ontologie est illustrée par une citation de Frege (1848-1925) :

> « Tant que l'arithmétique a pour objet les seuls nombres entiers, les lettres « a » et « b » figurant dans « $a + b$ » ne peuvent indiquer que des nombres entiers, et il suffit de définir l'emploi du signe plus placé entre deux nombres entiers. Mais toute extension du cercle d'objets auxquels sont assignés « a » et « b » rend nécessaire une nouvelle définition du signe plus. Veiller à ce qu'aucune expression ne puisse être dépourvue de dénotation, à ce qu'on ne puisse jamais calculer sans y prendre garde sur des signes vides tout en croyant opérer sur des objets, c'est là ce qu'exige la rigueur scientifique (...) » (*Fonctions et concepts* , Frege 1879, p. 92-93 , cité par Serfati, p.348 [21]).

Sous la prégnance d'une conception idéaliste des objets mathématiques dans laquelle l'écriture symbolique n'est qu'au service de leur représentation, un changement fondamental de pensée s'est produit avec Leibnitz, caractérisé par un changement dans la fonction de l'écriture symbolique : le système symbolique, en plus de représenter des objets idéaux, devient un moyen d'invention d'objets mathématiques ; de nouvelles formes de généralisation et d'abstraction émergent par les biais d'un « schéma de prolongement » basé sur la préservation des concepts et formes symboliques prédéfinies (Serfati, 2005 [21]).

1.2 L'enseignement des mathématiques et la nature des objets

La construction des nombres relatifs, qui est abordée à l'école secondaire, est un exemple paradigmatique du changement du rôle du symbolisme : leur existence est fondée non pas sur la représentation de grandeurs (il ne s'agit pas de justifier leur existence par une réduction à des êtres auxquels on accorderait une existence similaire à ceux du monde physique), mais sur le respect des opérations et des propriétés de l'arithmétique des nombres naturels et des « formes symboliques » associées (le « nombre théorique »). Par exemple, dans l'arithmétique

2. Formes obtenues par la combinaison de symboles, par exemple « 4-9 » dépourvue de signification pour les premiers géomètres. (Serfati, p.323 [21])

des nombres naturels, $a < b$ si et seulement si $a - b < 0$. C'est sur la base de cette définition qu'on étendra aux nombres négatifs la relation d'ordre : $-7 < -5$ puisque $-7 - (-5) = -2 < 0$.

Ces nouvelles formes d'abstraction et de généralisation ne sont pas sans lien avec les contextes culturels sous-jacents. Schubring (1986 [20]) montre bien qu'aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, une conception des mathématiques en lien étroit avec les notions de la *vie pratique* caractérise la pensée mathématique française. Schubring cite Busset, auteur d'un manuel de mathématiques, qui se plaint de l'échec de l'enseignement mathématique en France et de la marginalisation des mathématiques dans la culture à cause de l'admission de l'existence des quantités plus petites que rien. « *Les traités de la science... (ne doivent pas être) en désaccord avec les notions communes* » (Busset 1843, cité par Schubring [20]). En Allemagne, par contre, les nombres négatifs n'ont pas été rejetés, du moins pas jusqu'aux années 1820 ; un cadre théorique et philosophique de référence, la « doctrine des quantités opposées », a permis de concevoir ces nombres au-delà de la notion de grandeur [3].

2 Conceptions des mathématiques et difficultés des élèves

Les conceptions des mathématiques sous-jacentes aux classes en adaptation scolaire et celles concernant les notions de généralisation et d'abstraction font partie de l'arrière-plan dans le contexte duquel l'enseignement se développe et les difficultés des élèves sont interprétées. Puisque les élèves ont des « difficultés d'abstraction » ou puisque les objets mathématiques sont « abstraits » (objets de la pensée, symbolisation), des mécanismes de « réduction d'abstraction » basés sur la manipulation matérielle d'objets physiques sont mis en place, sous l'hypothèse que ces manipulations rendraient visibles les propriétés et les relations cherchées, celles-ci étant supposées contenues dans l'objet en question.

En effet, le ministère de l'Éducation du Québec suggère, en tant que mesures d'adaptation pour les élèves ayant des besoins particuliers, que les activités pédagogiques aillent du concret vers l'abstrait et que l'enseignant s'assure que l'élève est engagé cognitivement envers la tâche (MELS, 2014, p. 15 [17]). Dans le même sens : « ...Les élèves ont besoin de matériel didactique à manipuler afin de mieux comprendre les concepts abstraits et d'avoir un support visuel pour les procédures » (FSE, 2013, p.8 [6]) ou « ....pour aider les élèves à comprendre ou pour faciliter

3. Néanmoins, cette conception théorique de la construction d'objets mathématiques rencontre des difficultés : elle a été accompagnée d'une crise due à la découverte de contradictions (les paradoxes dans la théorie des ensembles, par exemple) qui a mis en cause cette manière de concevoir les objets mathématiques (leur nature, leur existence). Cette crise semble avoir eu plus d'impact sur le plan philosophique que sur celui de la production effective des mathématiques : peut-on considérer que les objets mathématiques ne sont que des propositions ? Et sur quoi les propositions mathématiques portent-elles ? etc.

le passage à la compréhension de concepts abstraits : aller du concret vers l'abstrait ; favoriser la manipulation d'objets concrets ; revenir au concret lorsqu'il y a un problème de compréhension ; avoir recours à des exemples qui collent au vécu des adolescentes et des adolescents ; utiliser des dessins, des illustrations, des analogies ; demander aux élèves de trouver des exemples, d'établir des comparaisons, de fabriquer du matériel concret ; tenir compte de la différence entre les garçons et les filles (ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d, p. 21 [16])

Un implicite guide ces décisions didactiques : l'accès aux objets et aux relations mathématiques se ferait en général par des inductions empiriques. Cependant, la nature des objets mathématiques résiste à ces traitements. Il est connu que les efforts didactiques pour enseigner les nombres relatifs sous des formes qui restent dans le registre des significations sont remplis de difficultés. Les différentes formes d'abstraction et de généralisation associées à la spécificité des objets mathématiques ne peuvent être ignorées lorsqu'il s'agit d'interpréter les dites difficultés.

2.1 L'invention de nouveaux objets mathématiques à l'école : un premier exemple

Dans le contexte spécifique de l'apprentissage des mathématiques, les relations susceptibles de généralisation sont surtout en lien avec l'intentionnalité didactique explicite (il ne s'agit pas d'inventer de nouvelles mathématiques, mais de s'approprier une pratique préexistante).

Analysons l'exemple suivant : il s'agit d'un jeu pour lequel les élèves doivent trouver une manière rapide de calculer la somme de 10 nombres entiers consécutifs quelconques. L'enseignant analyse avec toute la classe [4], durant un moment de débat public, une stratégie proposée par certains élèves consistant à réécrire la suite donnée en fonction du premier terme :
19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
$19 \quad 19+1 \quad 19+2 \quad 19+3 \quad 19+4 \quad 19+5 \quad 19+6 \quad 19+7 \quad 19+8 \quad 19+9$

Cette écriture facilite la recherche d'un nouveau calcul permettant de trouver la valeur de la somme originale :
$19 \times 10 + (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 19 \times 10 + 45.$

S'agissant toujours des suites de dix nombres entiers consécutifs, l'objectif didactique était de généraliser la méthode et d'introduire une expression algébrique pour représenter la formule de calcul.

Avant de généraliser la méthode permettant à l'enseignante d'atteindre l'objectif didactique,

4. Il s'agit d'élèves de l'adaptation scolaire, de la deuxième année du secondaire, identifiés comme des élèves en grave difficulté d'apprentissage.

celle-ci propose une autre suite numérique faisant partie du jeu dialectique qu'elle veut installer entre « le particulier » et le « général » :
46 47 48 49 50 51 52 53 54 55

Enseignante : peut-on utiliser un raisonnement similaire à celui qu'on vient d'utiliser pour la suite commençant par 19 ?
Élève A : oui, on peut le faire
$19 + 27 \quad 19 + 28 \quad 19 + 29 \quad 19 + 30 \quad 19 + 31 \quad 19 + 32 \quad 19 + 33 \quad 19 + 34 \quad 19 + 35 \quad 19 + 36$

L'élève ne « voit » pas dans la stratégie proposée la régularité attendue par l'enseignante ($46 \quad 46 + 1 \quad 46 + 2$ ....). Selon Sadovsky et al (2001 [19]), il n'est pas étonnant que les élèves n'observent pas ce que le professeur attend, en retenant des aspects qui ne sont pas ceux qui sont en lien avec l'intention didactique. Pour l'enseignant, l'exemple proposé est un exemple de « quelque chose de déjà élaboré » : pour lui, il est la particularité d'une généralité préexistante qui lie finalité et objectif didactique. La généralité à reconnaître par l'élève est d'abord contextualisée par la finalité de la situation (gagner au jeu) et ensuite par l'objectif didactique (produire une expression algébrique). Ces deux aspects de la généralisation reflètent bien le double processus d'adaptation et d'acculturation sur lequel s'appuient l'enseignement et l'apprentissage. En effet, d'une part les élèves adaptent (ou éventuellement modifient) leurs connaissances disponibles pour trouver une solution au problème en question et, d'autre part, cette activité « particulière » s'insère dans un processus d'institutionnalisation (commandé par l'enseignant) qui la place à l'intérieur d'un ensemble de savoirs préétablis que l'élève doit s'approprier.

Le passage suivant illustre l'action de l'enseignante à ce propos, suite à la proposition de l'élève antérieurement présentée :

Enseignante (à la classe) : pensez-vous qu'il est plus facile de faire le calcul sur la suite $19 + 27 \quad 19 + 28 \quad 19 + 29 \quad 19 + 30 \quad 19 + 31 \quad 19 + 32 \quad 19 + 33 \quad 19 + 34 \quad 19 + 35 \quad 19 + 36$?
Certains élèves : oui, parce que le 19 apparaît dix fois
Enseignante : comment fait-on ?
Certains élèves : 19 x 10 comme avant...
Enseignante : et après ?
Certains élèves : ajoutons le reste...

Un implicite est nécessaire à l'identification de la relation de généralité souhaitée par l'enseignante : le fait qu'en exprimant tous les nombres de la suite en fonction du premier, la somme des différences de chaque nombre par rapport au premier est constante et égale à 45. L'importance de cette valeur constante répond autant à la finalité (obtenir un résultat rapide) qu'à l'objectif de la situation (exprimer une formule algébriquement).

Les élèves qui ont élaboré cette méthode ont pu identifier cette régularité par l'expérimentation sur plusieurs suites proposées par l'enseignante, au moment du jeu. Cependant, le milieu de l'action est beaucoup plus pauvre, pour ceux qui sont en train d'interagir pour la première fois avec cette procédure, durant le débat public.

Le travail de l'enseignante devient alors fondamental pour équilibrer cette situation :
Enseignante : est-ce facile de calculer 27 + 28 + 29 +......
Certains élèves : c'est moins pire que 46 + 47 +......
Enseignante : oui, mais par rapport à ce que l'on a fait avec la suite 19 , 20, 21,.....
Certains élèves : c'était une suite plus simple....
L'enseignante s'aperçoit que ses interventions sont insuffisantes et qu'elles ne permettent pas d'enrichir le milieu de l'action de manière à ce qu'il lui offre des rétroactions pertinentes au regard de l'enjeu visé. Elle doit prendre en charge une action plus dirigée.
Enseignante : regarde, si l'on écrit ainsi :
$46 \quad 46+1 \quad 46+2 \quad 46+3$ .... à la place d'écrire $19+27 \quad 19+28$ .....
Il s'agit de la même suite, mais écrite de deux façons différentes. Il est plus facile de faire $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ que de faire $27+28+29+30+31+32+33+34+35$, n'est ce pas ?
D'autres élèves : oui, et on a encore 45...
Enseignante : voilà, regardez
Dans la suite de 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 on retrouve aussi 45, en l'exprimant ainsi :
$46 \quad 46+1 \quad 46+2 \quad 46+3 \quad 46+4 \quad 46+5 \quad 46+6 \quad 46+7 \quad 46+8 \quad 46+9$
De cette manière, on calcule 46×10 et ensuite, toujours $1+2+3+4+....+9=45$.

On voit bien que le rôle des exemples, du singulier, dans la production du général dépend du choix spécifique fait par l'enseignante et de l'activité qui est réalisée avec elle. Deux niveaux d'abstraction (cf. Orit Hazzan et Rina Zazkis, 2005 [11]) sont en jeu dans la situation précédente. Premièrement, un niveau impliquant des relations entre des objets (ceux qui font partie du « milieu » de la situation) et des sujets (connaissances du sujet). Ces relations sont mises en évidence par l'identification de régularités qui n'étaient pas attendues par l'enseignante, régularités qui ne sont pas inhérentes aux objets, mais qui sont dans l'interaction sujets-objets, autrement dit, dans l'interprétation faite par l'élève de la situation dans laquelle il se trouve, à partir d'un ensemble de connaissances et d'expériences disponibles. Cette mise en évidence permet, d'ailleurs, la constitution d'une schématisation (dans le sens de Gonseth [10]). Deuxièmement, un niveau commandé surtout par l'action de l'enseignante et exigeant une réflexion autour du rapport processus-objet (centrée sur les actions) liant la production d'une formule de calcul et sa représentation symbolique au moyen d'une expression algébrique ($10n + 45$).

L'accès à des niveaux d'abstraction plus élaborés (ceux qui portent sur « les actions » ou « les actions sur les actions », etc.) est ainsi étroitement lié avec la variété et la richesse des situations didactiques permettant l'élaboration de relations de nature différente (certaines d'entre elles émergeant de l'interaction de l'élève avec le milieu de la situation, d'autres en interaction avec l'enseignant), ce qui se traduit, d'un point de vue de l'enseignement, par certaines propositions énoncées par Giroux (2013 [8]) :

- Élargir le caractère d'utilité rattaché aux connaissances visées par la variation de situations faisant appel à des utilités différentes des savoirs.
- Miser sur des liaisons entre les situations, et possiblement par un jeu de relances de certaines productions qui révèlent un enjeu mathématique sensible non prévu.
- Inscrire le travail mathématique des élèves dans un temps relativement long, une durée, pourrions-nous dire, nécessaire à l'apprentissage. (Giroux, 2013, p.68 [8])

Une tradition empiriste d'enseignement présuppose qu'un processus d'abstraction émerge de l'identification d'un certain « trait commun » dans l'analyse d'expériences particulières (ignorant, en même temps, leurs différences), applicable ensuite à une variété d'expériences nouvelles (idée de généralité, associée à la notion de décontextualisation). Ces traits identifiables seraient « indépendants » de l'intentionnalité didactique : selon cette tradition, ils seraient « contenus » dans les expériences et le sujet ne devrait que les « découvrir » ; cependant, ils ne sont pas propres à chacune d'elles, ils émergent d'un regard intentionnel qui, dans le cas de l'enseignement, est porté par l'objectif d'enseignement permettant d'isoler une ressemblance entre elles. Nous suivons Wittgenstein sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un regard individuel, mais collectif, qui se développe à l'intérieur des pratiques spécifiques d'une communauté : dans notre cas, les pratiques d'enseignement des mathématiques qui orientent ce regard par la nature des situations proposées (la notion d'utilité des savoirs prend ici son sens) et l'action de l'enseignant vis-à-vis le savoir, en tant que représentant d'une communauté chargée de transmettre des savoirs mathématiques préexistants.

Les phénomènes caractérisant certaines interventions en adaptation scolaire mentionnées plus tôt montrent bien leur écart par rapport aux propositions énoncées par Giroux : réduction des tâches (impact sur l'enjeu de savoir), découpage des savoirs en micro-tâches (ce qui complexifie évidemment l'établissement de relations).

Orit Hazzan et Rina Zazkis (2005 [11]) affirment que les élèves priorisent des stratégies de réduction des niveaux d'abstraction lors de la résolution d'activités mathématiques (« *Reducing abstraction* »). Notre travail suggère que nous analysions cette affirmation à la lumière d'une culture scolaire qui favorise cette réduction, sous l'hypothèse que l'accès à l'abstrait se fait par la manipulation du « concret » (indépendamment de la nature du savoir en question).

Notre exemple montre que le « concret » (le milieu de l'action) peut être déjà mathématisé (le milieu que nous avons choisi ne contient pas d'objets physiques, il s'agit de nombres naturels et d'opérations sur ceux-ci ; il présuppose une familiarité des élèves avec ces savoirs) et que ce sont les interactions variées autour de ce savoir qui enrichissement les relations conceptuelles impliquées ; plus les élèves interagissent avec des situations organisées tenant compte des différents niveaux d'abstraction, plus « l'abstrait » devient « concret », non pas par une réduction des objets de la pensée à des objets matériels, mais en fonction de la fréquentation dans le contexte de situations qui rendent les objets utiles.

La question de l'utilité du savoir dans le contexte spécifique des situations didactiques devient fondamentale pour l'organisation des tâches : différents usages du même concept se rattachent à différents niveaux d'abstraction. Dans la situation précédente, l'utilité première de la formule de calcul cherchée est de permettre de calculer rapidement la somme de la suite en question, ce qui implique surtout un travail sur le processus de calcul impliqué.

2.2 L'exemple de la deuxième tâche

Analysons maintenant la tâche suivante associée à la même situation :

« *Donnez, si possible, une suite de dix nombres entiers consécutifs dont la somme est 34563.* »

Dans ce cas, ce n'est ni le processus de production de la formule ni son usage pour obtenir une somme spécifique qui nous intéresse, mais l'analyse de sa structure : dans l'expression $10n + 45$, le premier terme est toujours un multiple de 10 ; si l'on additionne 45, on obtiendra toujours un nombre qui finit par 5. Il est alors impossible de trouver une suite dont la somme est 34563.

L'enjeu de cette activité est l'établissement de certaines relations autour de l'objet « expression algébrique » : par l'analyse de sa structure, l'expression « 10n + 45 » devient un objet de réflexion en soi permettant, dans le contexte proposé, de déterminer les nombres qui peuvent être la somme de 10 entiers consécutifs.

L'analyse précédente deviendra limitée au moment de modifier la tâche et de demander la possibilité d'obtenir *une suite de huit nombres entiers consécutifs dont la somme est 34586*. Cela exigerait l'établissement de nouvelles relations et permettrait l'introduction d'une pratique institutionnelle concernant le travail sur les équations élémentaires.

L'établissement des relations sur les nouveaux objets – les expressions algébriques – par la mise en place de l'opératoire sur les expressions algébriques favorise le développement de nouveaux niveaux d'abstraction, en particulier par l'exigence de détacher la notion d'expression algébrique de sa fonction de représentation et de l'impliquer dans un processus opératoire régi par des règles syntaxiques. En effet, lors de la résolution d'équations, une suspension sémantique se produit au profit d'un travail strictement syntaxique : ce ne sont pas les « significations » associées aux expressions algébriques impliquées qui sont l'objet de la réflexion, ce sont les règles opératoires sur des expressions algébriques qui prennent leur fondement sur les opérations sur les nombres et leurs propriétés.

2.3 Un exemple sur l'élaboration de nouvelles relations autour d'un objet déjà connu

La division euclidienne est un objet d'enseignement à l'école primaire, mais aussi à l'école secondaire. Un retour sur un objet ancien, mais enrichi de nouveaux niveaux d'abstraction est l'enjeu fondamental de la reprise de la division.

Analysons la tâche suivante : en utilisant la calculatrice, trouvez le reste de la division de 3650 par 48.

Le fait d'exiger l'utilisation de la calculatrice (d'interdire le calcul à la main) fait en sorte que l'enjeu de la tâche ne se situe pas au niveau du processus de calcul de division (ou de la mise en acte de la procédure qui lui est associée), mais sur l'analyse des relations entre le dividende (a), le diviseur (b), le quotient (q) et le reste (r) d'une division, représentés symboliquement par l'expression $a = bq + r$.

Plusieurs autres tâches permettent de porter l'attention sur les relations entre ces quatre éléments de la division. Par exemple :

« *Donnez le dividende d'une division dont le diviseur est 48 et le reste est 15. N'y a-t-il qu'un dividende possible ? Pourquoi ?* »

Le fait de ne pas pouvoir réaliser le calcul de la division exige la mise en place d'autre types de stratégies.

En principe, certains élèves supposent l'existence d'une solution unique basée dans la stratégie suivante :

Élève : *il faut que le premier nombre soit plus grand que 48. J'essaie avec 55.*

L'élève fait le calcul et par des ajustements, propose 63 comme dividende. Cependant, au moment d'organiser l'explication, il propose :

Élève : *ah oui, je vois...*
48 divisé par 48 est 1 et le reste est 0.
Si je mets 49, le reste va être 1, alors je dois mettre 63 (48 +15) pour avoir comme reste 15.

L'enseignant s'appuie sur la dernière analyse pour essayer de mettre en évidence l'existence d'autres solutions :

Enseignant : *si le dividende est 64, quel est le reste ? Et s'il est 65 ou 66 ?*

Élève : *ça marche pas, parce que le résultat n'est pas le même...*

Les conditions de l'activité ne font pas référence au quotient, mais l'unicité de la solution proposée par l'élève est en lien avec le fait que le quotient change lorsque le dividende est modifié. Ainsi, même si l'élève reconnaît, à partir des interventions de l'enseignant, qu'avec 63 comme dividende, on obtient 15 comme reste, il n'adopte pas celui-ci comme réponse possible puisque le quotient n'est pas le même.

La réponse de l'élève est associée à l'unicité du calcul, pour un quotient et un reste déterminés. C'est justement l'analyse de la relation $a = bq + r$ en termes des variables impliquées qui introduit un autre niveau de généralité. D'autres tâches seront nécessaires pour consolider cette nouvelle pratique autour d'un objet ancien. Par exemple :

a) Donner le dividende et le diviseur d'une division dont le quotient est 58 et le reste 39. N'y en a-t-il qu'un ? Pourquoi ?
b) Y a-t-il une division qui donne un dividende de 32, un quotient de 12 et un reste de 1 ? Justifier.
c) Le quotient de la division d'un nombre par 15 est 6 et le reste 2. Quel est ce nombre ? N'y en a-t-il qu'un ? Pourquoi ?

Si l'expression symbolique des relations entre les différents éléments de la division émerge bien dans un processus constructif de généralisation qui a son origine dans le registre des significations, ces significations impliquent déjà un certain niveau de mathématisation, ce qui permet de mettre en évidence la mise en jeu des « couches » d'abstraction plus développées autour de l'objet en question.

La diversité des tâches autour des relations identifiées permet d'enrichir des relations conceptuelles impliquées dans les niveaux d'abstraction constitutifs de l'objet. Rappelons que nous avons déjà mentionné un phénomène caractérisant les classes d'élèves faibles qui va à l'encontre de l'enrichissement mentionné : l'évitement du travail sur un même objet de savoir sur un temps prolongé (Houle, 2007 [13]). Il s'agit d'un phénomène observé en adaptation scolaire mais sur lequel il y a très peu de recherches permettant de fournir des interprétations.

En guise de conclusion

Nous avons essayé de montrer que les processus d'abstraction et de généralisation dans l'apprentissage des mathématiques ne sont pas indépendants de la nature des situations proposées et de l'action de l'enseignant en tant que représentant de la culture mathématique scolaire.

Puisque les objets mathématiques sont abstraits, plusieurs propositions d'intervention auprès des élèves en difficulté, appuyées sur des orientations ministérielles, suggèrent la manipulation de matériel physique dans le but d'aider la compréhension des dits concepts. L'analyse des processus d'abstraction et de généralisation à la base de la construction des objets mathématiques et les exemples que nous avons présentés montrent bien que l'abstraction mathématique se situe au niveau des actions que l'on fait sur les objets (physiques et/ou mathématisés). Ce qui importe alors, c'est la nature des interactions avec un milieu didactique proposé par l'enseignant (avec une intention didactique spécifique) et non pas la « manipulation » d'objets par elle-même. Le contexte y joue un rôle fondamental. Il inclut la finalité de la situation, l'interprétation que font les élèves de cette situation et de sa finalité, et l'action de l'enseignant porteur de modes culturels de « faire » en mathématique.

La possibilité de réutilisation des savoirs exige, en même temps, la mise en place d'autres niveaux d'abstraction associés à des processus de décontextualisation ; il faut remarquer que ce concept ne fait pas référence à l'absence de contexte mais à la reconnaissance des conditions de réutilisation des savoirs. L'identification et l'expression symbolique d'invariants dans les différentes situations caractériseraient les processus de formalisation de savoirs mathématiques, ces derniers étant développés à l'intérieur d'un nouveau contexte culturellement reconnu, celui des pratiques formelles en mathématiques. Les processus de généralisation et d'abstraction dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques engagent une activité de réorganisation, d'établissement de nouvelles relations, d'intégration des connaissances autour d'un objet, à l'intérieur d'une pratique sociale préétablie (Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T., 2001 [12]).

Une tension semble être au cœur du processus d'enseignement et d'apprentissage, en ce qui concerne l'abstraction en mathématique : d'une part, la mise en acte de stratégies de réduction du niveau d'abstraction (« *Reducing abstraction* », Orit Hazzan & Rina Zazkis [11]) semble être priorisée par les élèves (peut-être favorisée par la culture scolaire) et, d'autre part, la spécificité des objets de savoir qui commande un mouvement inverse. Les actions de l'élève et de l'enseignant se déroulent dans le contexte de cette tension ; la nature de ces actions et l'organisation didactique favorisant la réflexion sur ces actions est l'enjeu fondamental de l'enseignement. L'exemple de la somme de dix nombres entiers consécutifs permet de montrer que la généralisation à retenir n'est pas celle identifiée par l'élève mais qu'elle est déterminée par l'objectif d'enseignement. Le rôle de l'enseignant y est fondamental, non pas par la réduction de la tâche pour la rendre plus « concrète », mais par ses interventions permettant de lier la finalité de la situation avec l'objectif d'enseignement, tout en préservant l'enjeu épistémologique de la tâche.

L'interprétation des productions des élèves ainsi que l'analyse des difficultés d'apprentissage doivent se placer dans ce contexte d'interaction didactique. Certaines interprétations, en particulier celles produites dans le cadre de la psychologie cognitive, minimisent les conditions didactiques de production de savoirs et attribuent, par le modèle d'interprétation adopté, les difficultés d'abstraction à des défaillances dans certains mécanismes cognitifs du sujet.

Remerciements L'auteur souhaite remercier les évaluateurs qui l'ont vraiment aidé à améliorer le texte d'une manière très substantielle.

Références

[1] Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching*. Dotdrecht : Kluwer Academic Publishers.

[2] Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations, in : C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F., Vandebrouck, F. Wozniak (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[3] Cai, J., Knuth, E. (2011). Early Algebraization. Springer. Coulange, L., Drouhard, J.P. (eds.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. Recherches en didactique des mathématiques.

[4] Coulange L., Drouhard J-P. (Eds) (2012), Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives, *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble, France.

[5] Delaunay, A. « ABSTRACTION », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 19 avril 2016. URL : http://www.universalis.fr/encyclopedie/abstraction/

[6] Fédération des syndicats de l'enseignement (FSE) (CSQ). (2013). *Référentiel : Les élèves à risque et HDAA*. Québec : Fédération des syndicats de l'enseignement.

[7] Fondation Jean Piaget, *Abstraction réfléchissante et généralisation constructrice* (en ligne). http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=124&IDMODULE=22

[8] Giroux, J. (2013) Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*. Vol 7 (1).

[9] Giroux, J. (2000). Le plaisir de faire des mathématiques, de les enseigner et de les apprendre. http://www.adaptationscolaire.net/themes/JacintheGiroux.pdf.

[10] Gonseth, F. (1936) *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique*. Felix Alcan, Paris.

[11] Hazzan, O., Zazkis, R. (2005) Reducing Abstraction : The case of school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 58 : 101–119.

[12] Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001) Abstraction in context : Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*.

[13] Houle, V. (2007) *La calculette comme outil pour enseigner et apprendre la numération de position dans une classe d'élèves en difficulté d'apprentissage*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

[14] Laporte, J. (1940). *Le problème de l'abstraction*. Presses Universitaires de France.

[15] Legendre, M-F, *Piaget et l'épistémologie*. Fondation Jean Piaget (en ligne), `http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=309&IDMODULE=72`

[16] Ministère de l'Éducation de l'Ontario (Sans date). *À l'écoute de chaque élève grâce à la différenciation pédagogique*. Repéré à `http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/a_ecoutepartie1.pdf`

[17] Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (Mels). (2014). *Précisions sur la flexibilité pédagogique, les mesures d'adaptation et les modifications pour les élèves ayant des besoins particuliers*. Québec : Les publications du Québec.

[18] Otte, M. (1992). Constructivism and Objects of Mathematical Theory. In Javier Echeverria, Andoni Ibarra & Thomas Mormann (eds.), *The Space of Mathematics*. De Gruyter 296—313.

[19] Sadovsky, et al. (2001). *Actualizacion curricular 7mo grado*. Direccion de curricula. Gobierno de la ciudad de Buenos Aires.

[20] Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, 12. Irem de Grenoble.

[21] Serfati, M. (2005) *La révolution symbolique : La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Éditions Pétra.

[22] Sierpinska, A. (2012). L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, orientations, recherches.* (pp. 91-98). Montréal, QC : Presses de l'Université du Québec.